

# Hele-Shaw Apparatus

渡辺 保真, Ethirajan Rathakrishnan

# Contents

1	緒言 . . . . .	1
2	設計・図案 . . . . .	1
3	Hele-Shaw 装置 . . . . .	7
4	流れの可視化 . . . . .	8
	4.1 Hele-Shaw のアナロジーにおける基礎方程式 . . . . .	9
5	流れ場の可視化実験 . . . . .	11

# Hele-Shaw 装置の設計, 製作, 及び実験

渡辺 保真<sup>1</sup>, Ethirajan Rathakrishnan<sup>2</sup>

## 1 緒言

Hele-Shaw 装置とはポテンシャル流れと類似的な流れを生成することのできる装置である。液体が小さな間隔 (1 mm 程度) を空けた十分に大きい平行平板間を流れる際に, 非粘性流れと類似な流れが生成される事が Hele-Shaw により実演された。即ち, Hele-Shaw の方法は類推法の一つであり, 水などの粘性流体の流れをあたかもポテンシャル流であるかのように振る舞わせる手法である。本報告書では東京大学柏キャンパス・新領域創成科学研究科鈴木研究室で行われた Hele-Shaw の実験装置の設計, 製作, 及び実験に関して述べる。装置の外枠はベークライト, 正面の観測窓はポリカーボネート製である。

## 2 設計・図案

今回の設計に際して, 流れを挟む平行平板間隔は 1.5 mm とした。外枠部分の図面を図 1 に示す。なお, 図面における長さの単位は全て mm である。

<sup>1</sup>東京大学大学院 工学系研究科 航空宇宙工学専攻, 鈴木研究室, 博士課程

<sup>2</sup>東京大学大学院 新領域創成科学研究科 先端エネルギー工学専攻, 客員教授

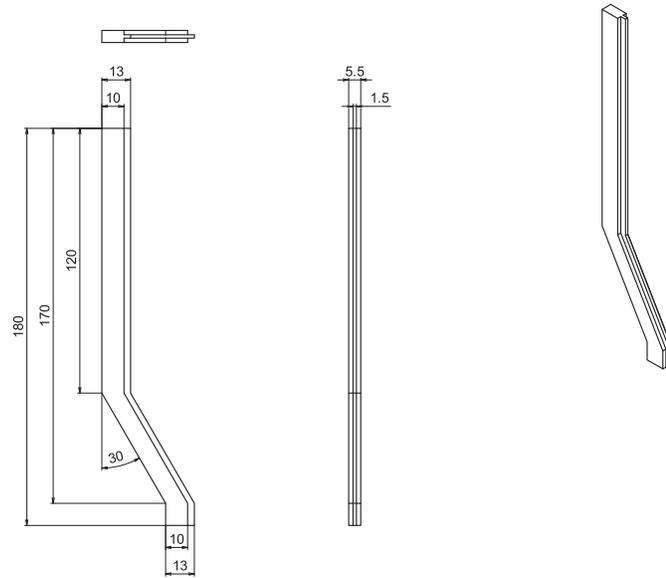


図 1 外枠部分の概要.

外枠の写真画像を図 2 に示す.



図 2 外枠.

組み立て後の図面を図 3 に示す. 組み立てには外枠, プラスチック製観測窓, 上部のタンクをそれぞれ 2 つずつ, 及び流路下部を固定するための矩形の窪みと円形の排水孔とを持つ土台部分が用いられる.

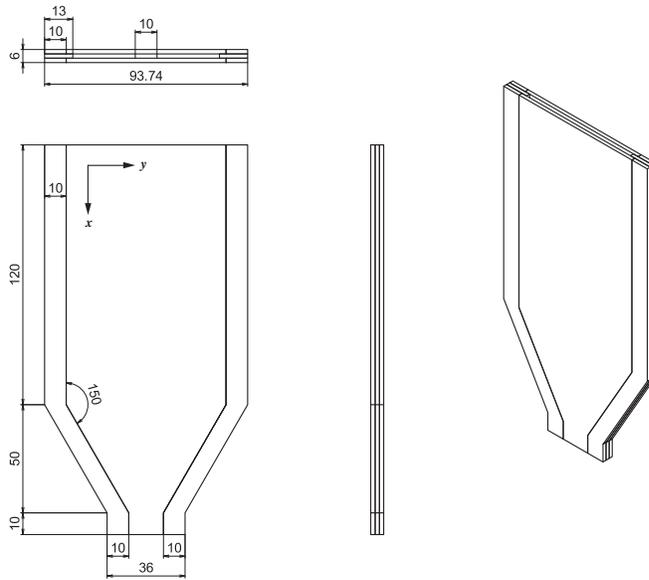


図 3 Hele-Shaw 装置組み立て図面.

実験装置の組み立て図を図 4 に示す.

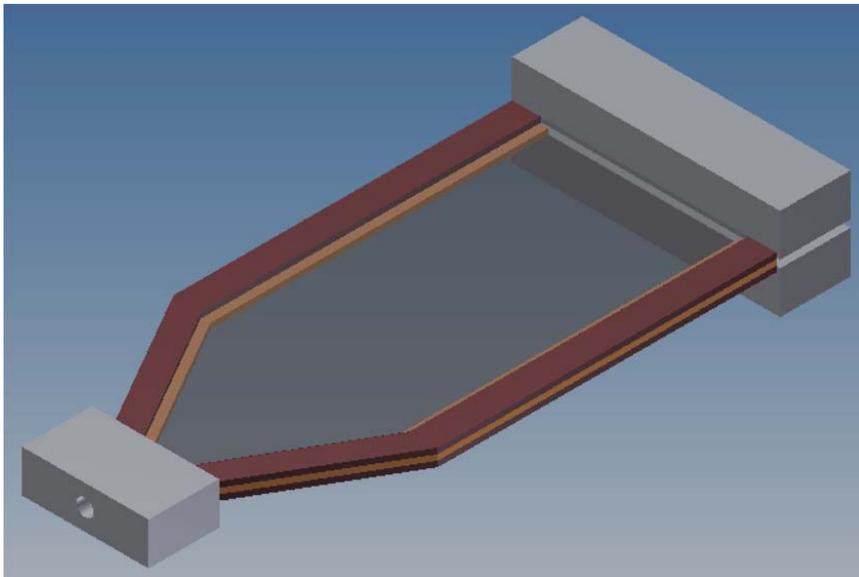


図 4 Hele-Shaw 装置組み立て図.

観測窓の寸法を図 5 に示す.

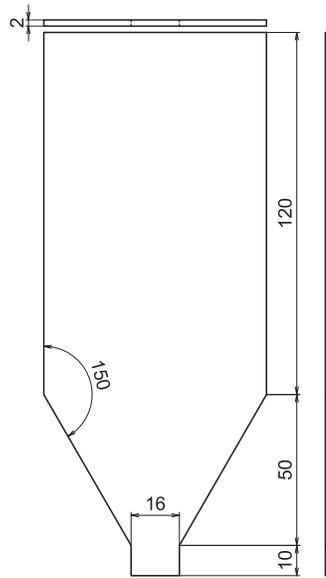


図 5 観測窓.

流路固定用の窪みと排水孔を持つ土台部分の図面を図 6 に示す.

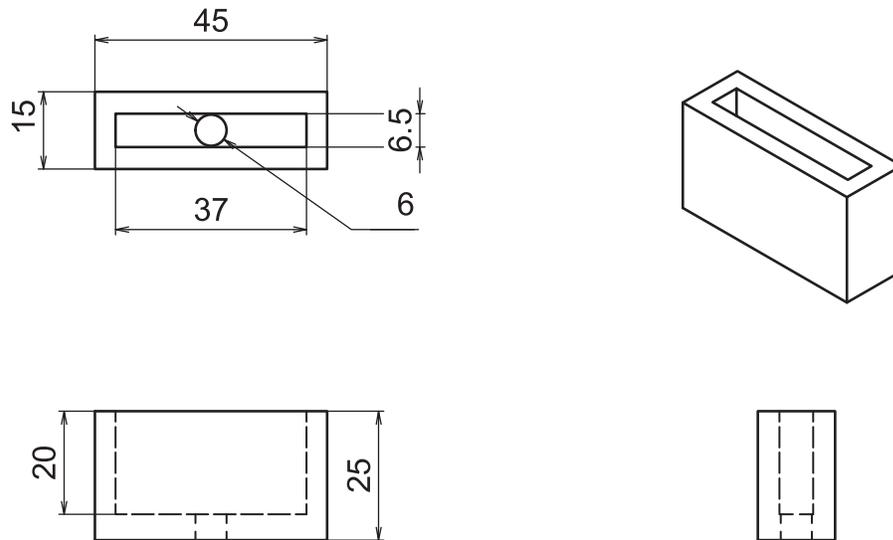
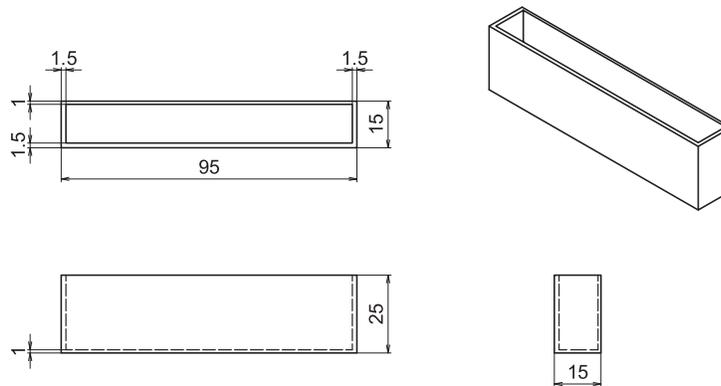
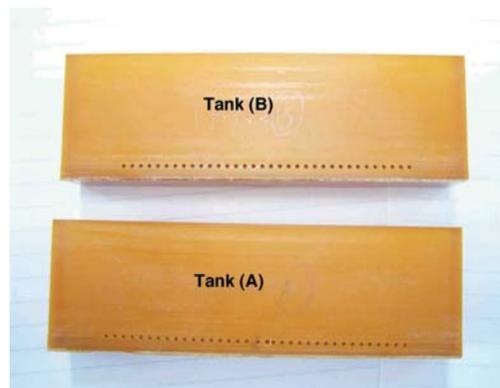


図 6 土台部分の図面

タンクの図面, 製作されたタンクの流出孔付近の写真, 及びタンクの上面からの写真を図 7 に示す. 流出孔の直径は 1 mm であり, 互いに 1 mm 間隔で配置されている. 2つのタンクの流出孔はそれぞれ互い違いの位置に来るように作成された.



(a) 図面



(b) 流出孔



(c) タンク上面からの写真

図 7 タンクの詳細 (a) 図面, (b) 側面図, (c) 上面図.

外枠部分と透明な観測窓との組み立て図を図 8 に示す.

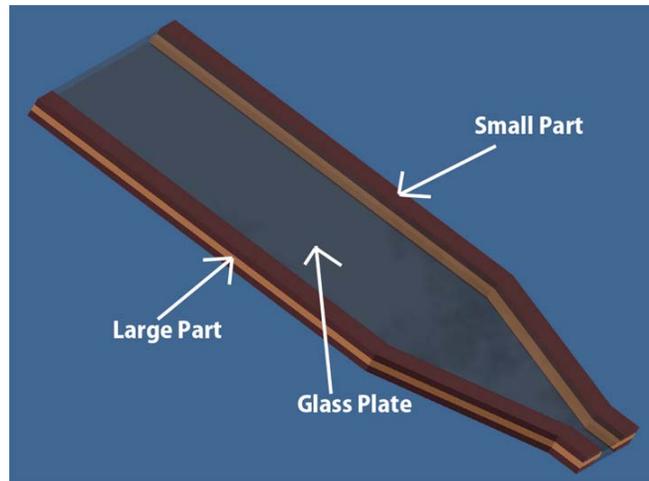


図 8 外枠と観測窓組み立て図.

図 9 に Hele-Shaw 装置の最終的な組み立て図を示す. 土台部分に繋がれたビニールチューブは流量調節バルブへと繋がっている. 流量調節バルブを用いることで, 流路での流れの速さを調整することが可能である.



図 9 Hele-Shaw の実験装置完成図.

### 3 Hele-Shaw 装置

Hele-Shaw の実験装置はポテンシャル流れと類似の流れを生成することができる装置である。これは Hele-Shaw のアナロジーとして知られる類推法に基づく実験である。微小な間隔を空けて設置された平行平板間の流路での流れは実際には非常に粘性の影響が強い流れである。この際、流体にかかる慣性力は粘性力に比べて無視できるほどに小さい。この条件の下では、流れを記述する方程式は Euler のポテンシャル流れと同じ形式となる。しかしながら、壁面境界における滑り無し条件は満たされていない点に注意が必要である。

この実験装置を用いることで、ポテンシャル流れに関連する様々な現象を表現することが可能である。Hele-Shaw の実験装置内部の平行平板間では流れは 2 次元非圧縮流れであり、実際には粘性の影響が大きい低 Reynolds 数流れであるが、非粘性流れ (Reynolds 数無限大に相当) の流線を表現することが可能である点は非常に興味深い。

Hele-Shaw 装置の完成図を図 9 に示す。この装置は、2 枚の透明板 (プラスチックまたはガラス) を間に 1 mm 程度の間隔を空けて外枠に固定することにより製作される。組み立ての際にはこの間隔が均一になるように注意し、これらの透明板の上には断面が長方形の 2 つのタンクを図 9 のように設置する。タンクは透明板と同じように 1 mm 程度の間隔を空けて設置し、図 7 に示す水及び染料の流出孔 (直径 1 mm) が内側を向くように配置する。このとき、それぞれのタンクの流出孔同士が互い違いの位置に来るように調整する。透明板に挟まれた流路部分の下端は徐々に面積が小さくなり、最終的に土台部分に空けられた円形の排水孔に繋がる。片方のタンクは水で満たし他方のタンクは染料 (絵の具または墨汁) で満たす。実験開始時には排水チューブのレギュレータを閉じ、装置を垂直に設置しておく。レギュレータを開くと流路には水と染料による流線の縞模様が短時間の内に形成される。

タンク内の水と染料は重力により流路内に投入され、流路内では水による流れが形成される。今回の実験では染料として墨汁を薄めた物を使用し、流線の可視化を行った。流路で流れが一様な領域を測定領域として用い、様々な物体周りの流れを可視化した。

Hele-Shaw 装置による流れの可視化手順は以下の通りである。

- Hele-Shaw 装置を図 9 のように垂直に設置する。
- 流路と同等の厚みの実験模型 (長方形の板など) を測定部中央に設置する。
- レギュレータを閉じた状態でタンクに水と染料を満たす。
- 配水管をビーカーなどの容積が分かるものに繋ぐ。
- レギュレータを徐々に空けてゆくと水と染料が流路内をゆっくりと流れ出し、模型の周りに流れが形成される。
- 流れ場には染料による流跡線 (定常流れなので流線と同じ) が形成されるのでこれらの写真を撮ったり画用紙に流線を投影してスケッチを行うなどして観察する。

上記の手順を他の実験模型に対して繰り返す。

## 4 流れの可視化

Hele-Shaw の実験装置による可視化実験を始めるに当たり, 流れの一様性を確認しておく必要がある。これは模型を投入しない状態で装置を動かすことで簡単に確認することが可能である。模型を入れない状態で観察した流れ場の様子を図 10 に示す。

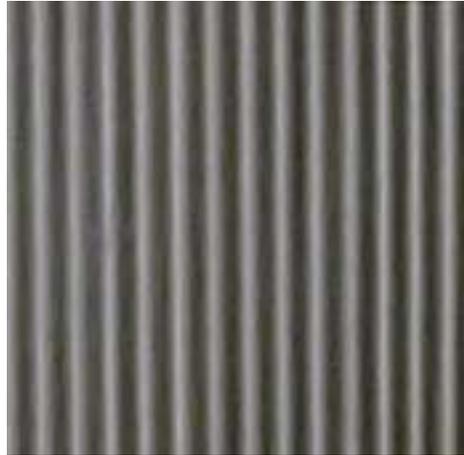


図 10 測定領域での流線

可視化には墨汁を用いており, 黒と透明の流線はそれぞれ墨汁と水に相当する。流線は滑らか且つ平行であるので流れが一様であることが確認できる。これにより装置が精度良く制作されたことが検証された。

流れの一様性が確認できれば模型を用いた実験を行うことが可能である。実験模型は観測領域中央に設置する。この際, 実験模型の厚みが流路厚みと同等であることが非常に重要となる。模型を設置した後レギュレータを開けば流れが形成される。実験中に流れた液体は容積を計測可能な容器に回収しておき, この容積から実験中の流速を算出できる。

流路の断面積を  $A$  とすると体積流量は以下のように算出される。

$$\dot{V} = A \times V$$

故に, 実験時間  $t$  の間に容積  $V$  の流体が回収されたとすると, 流速は次のようになる。

$$V = \frac{V}{t \times A}$$

従って流れの Reynolds 数は

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

で与えられる。ここで  $\rho$  と  $\mu$  はそれぞれ水の密度と粘性係数,  $L$  は代表長さである。

このようにして、流速は体積流量を計測することで決定され、これにより Reynolds 数が算出される。Hele-Shaw 装置を用いることで様々な模型に対して定常な 2 次元ポテンシャル流れを実現可能である。

Hele-Shaw 装置を有効に使うことにより実用上有用である様々な流れ場の可視化を行えるが、厳密な流れの 2 次元性保証するために模型と透明板の間を流体が流れないように作っておくことが非常に重要となる。

#### 4.1 Hele-Shaw のアナロジーにおける基礎方程式

ここまでで Hele-Shaw の実験装置がポテンシャル流れに類似な流れを生成できることを見てきた。この実験的事実は数学的にも示すことが可能である。Hele-Shaw 装置における流れの条件下では流れの支配方程式は Euler のポテンシャル流れの式と同じ形式となる。しかし、実際の流れでは壁面において滑り無し条件が課される点には注意が必要である。流路内の流れは以下で見てゆくように 2 次元非圧縮流れとなる。

定常非圧縮流れに対する Navier-Stokes 方程式は

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (1b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (1c)$$

であり、 $u$ 、 $v$  及び  $w$  はそれぞれ  $x$ 、 $y$  そして  $z$  方向の速度成分である。 $x$  軸は流れ方向、 $z$  軸は透明板に垂直な方向、そして  $y$  軸はこれらと流れに垂直な方向である。速度成分  $w$  は  $w = 0$  を満たす。これは流路平面に垂直な方向に流れがないことを表しており、このために Navier-Stokes 方程式の  $z$  成分が消える。Hele-Shaw 流れにおいて慣性力は粘性力に比べて無視できるほど小さいので  $x$ 、 $y$  方向の運動量式の左辺は無視できる。同様にして粘性項に関しては  $\partial^2 u / \partial z^2$  及び  $\partial^2 v / \partial z^2$  のみが支配的であり、その他の成分は比較的小さい。故に  $x$ 、 $y$  方向の運動量式は以下のように簡略化される。

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2b)$$

他方、2 次元平行平板間の層流流れの速度プロファイルは

$$u = u_{\max} \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

で与えられる。ここで、 $2c$  は Hele-Shaw 装置における平板間隔であり、 $u_{\max}$  は速度の  $x$  方向成分  $u$  の最大値である。上記の速度プロファイルは次のように書き表すこともできる。

$$u = \frac{3}{2}u_m \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad (3)$$

ここで  $u_m$  は  $u$  の平均値である. 同様にして  $y$  方向速度分布に関しても

$$v = \frac{3}{2}v_m \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \quad (4)$$

となる. (3) 式及び (4) 式を (2) 式に代入することで

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3\mu}{c^2}u_m \quad (5a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{3\mu}{c^2}v_m \quad (5b)$$

を得る.  $x, y$  方向に関する式 (5a) 及び (5b) をそれぞれ  $y, x$  に関して微分することで次の等式を得る.

$$\frac{\partial u_m}{\partial y} = \frac{\partial v_m}{\partial x} \quad (6)$$

流れ関数にを用いて各速度成分は

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

及び

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

と表される. 以下では  $u = u_m, v = v_m$  とすると, (6) 式より

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

を得る. 故に

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0} \quad (7)$$

となる. (7) 式は 2 次元定常, 渦無し, 非圧縮流れを表す. Navier-Stokes 方程式を Hele-Shaw 装置の条件に基づいて簡略化することで (7) 式に帰着した. これにより, Hele-Shaw 装置の粘性非圧縮流れはポテンシャル流れと等価であると結論される.

## 5 流れ場の可視化実験

図 10 に示すように Hele-Shaw 装置の流れの一様性を確認した後，いくつかの模型を用いて実験を行い，流れ場の可視化を行った．実験では円形，正方形，及び三角形（上向きと下向き）の模型を用いて流れ場を可視化した．観察された流線を図 11 から 14 に示す．

円板周り流線を図 11 に示す．流線は 2 次元円柱周りのポテンシャル流れと同等であった．流れは円の中心を通る流れ方向軸及びそれに垂直な軸に関して対称である．前方よどみ点及び後方よどみ点が明瞭に観察された．以上より，Hele-Shaw 装置における流れはポテンシャル流れと類似であることが確認された．

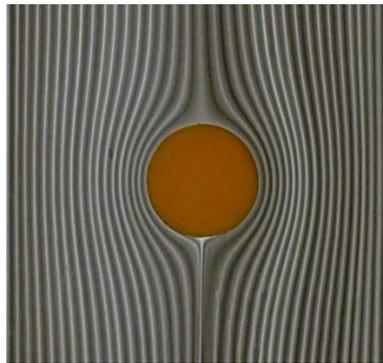


図 11 円板周りの流れ．

正方形板周りの流れを図 12 に示す．円板周りの流れと同様に流れ場は  $x, y$  両軸に関して対称であった．稜角があるにも拘わらず前方よどみ点及び後方よどみ点が明瞭に観察された．模型の後方では非粘性流れと同じように後流で渦は形成されなかった．



図 12 正方形板周りの流れ．

二等辺三角形形状の模型に関しては，頂点が上向きと下向きの場合に流れ場の可視化を行った．結果をそれぞれ図 13，図 14 に示す．両方の場合で流れはポテンシャル流れと類似であることが確認された．



図 13 三角形（上向き）の模型周りの流れ.



図 14 三角形（下向き）の模型周りの流れ.

稜角を持った模型（正方形模型, 三角形模型）及び持たない模型（円板模型）を用いた流れの可視化により本報告書での実験に際して用いた Hele-Shaw の実験装置の設計・製作は適切であり, この装置を用いることでポテンシャル流れと等価な流れ場を生成可能であることが示された.

## 文献

Ethirajan Rathakrishnan, *Instrumentation, Measurements, and Experiments in Flow*, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 2007.



# Hele-Shaw Apparatus

Yasumasa Watanabe and Ethirajan Rathakrishnan

# Contents

1	Introduction . . . . .	1
2	Design Procedure . . . . .	1
3	Hele-Shaw Apparatus . . . . .	7
4	Visualization . . . . .	8
4.1	Basic Equations of Hele-Shaw Analogy . . . . .	9
5	Flow Past some Shapes . . . . .	11

# Hele-Shaw Device-Design, Fabrication, and Testing

Yasumasa Watanabe<sup>1</sup> and Ethirajan Rathakrishnan<sup>2</sup>

## 1 Introduction

Hele-Shaw device is a unique facility, capable of generating flow analogous to potential flow. Hele-Shaw demonstrated that, when a liquid is made to flow in a narrow gap (around 1 mm) between two large flat plates, the flow become analogous to inviscid flow. Thus, Hele-Shaw technique is an analogy method, which renders the flow of a viscous fluid, such as water, to behave as a potential flow. This report presents the design, fabrication and testing of Hele-Shaw device, carried out in Suzuki Laboratory, in the Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, Kashiwa Campus, Japan. The frames were made of hylam material. The side windows were made of transparent plastic sheets.

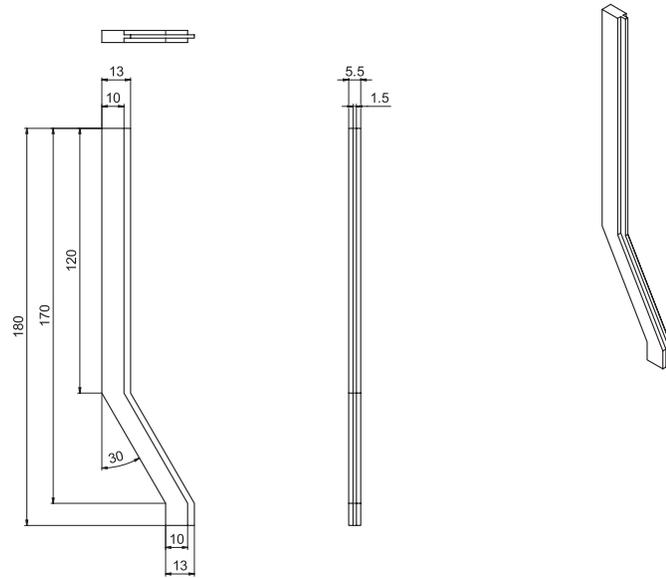
## 2 Design Procedure

In the present design, the gap for the flow is kept as 1.5 mm. The side plates are given a shape, as shown in Figure 1. All the dimensions are in millimeter.

---

<sup>1</sup>Doctoral Student, Suzuki Laboratory, Department of Aeronautics and Astronautics, The University of Tokyo, Kashiwa Campus, Japan

<sup>2</sup>Visiting Professor, Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo, Kashiwa Campus, Japan



**Figure 1** Schematic diagram of side plate.

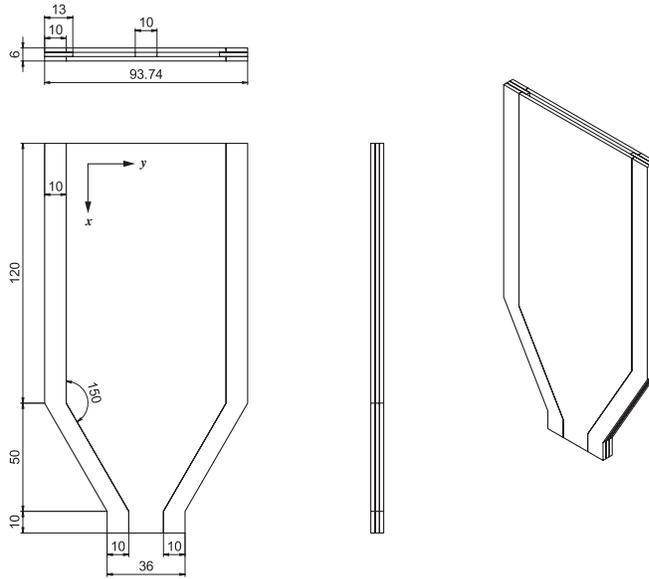
A photographic view of the side plate is shown in Figure 2.



**Figure 2** A pictorial view of Side plate.

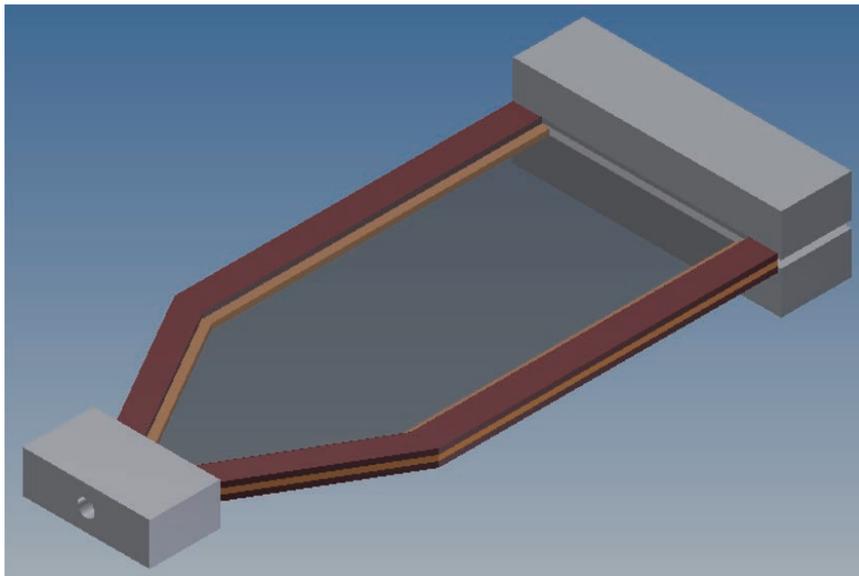
The assembly drawing of the setup, which includes 2 side plates, the transparent windows, two tanks at the top, a bottom part which accommodates

the rectangular shape of the device bottom, and has a circular opening at the opposite end is shown in Figure 3.



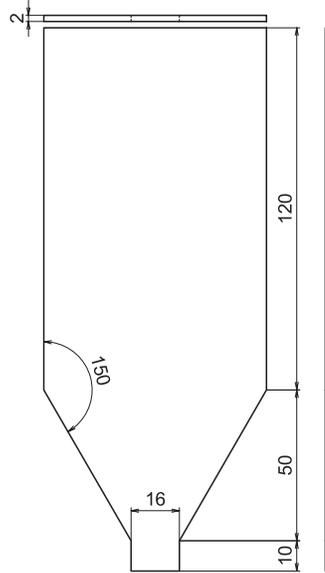
**Figure 3** Hele-Shaw device assembly.

An artistic view of the device is shown in Figure 4.



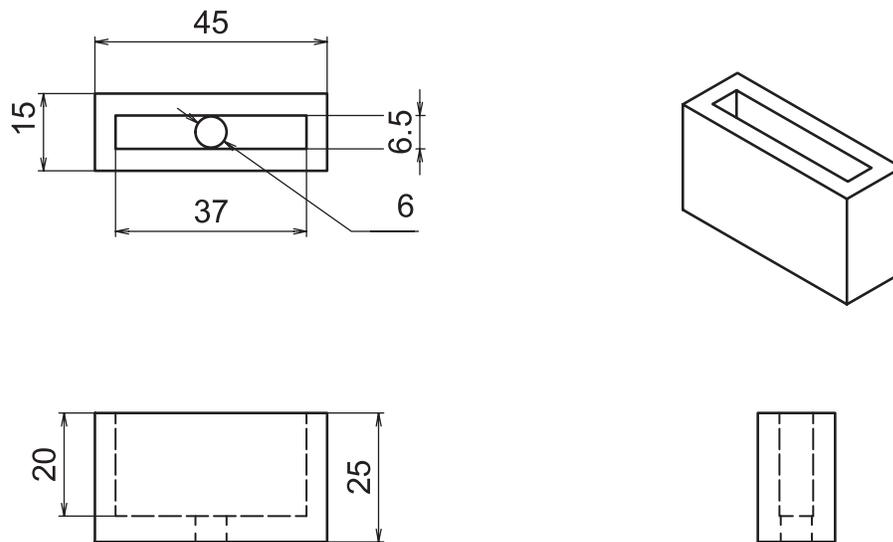
**Figure 4** Hele-Shaw device assembly.

The dimensions of the side (transparent) window is shown in Figure 5.



**Figure 5** Side plate.

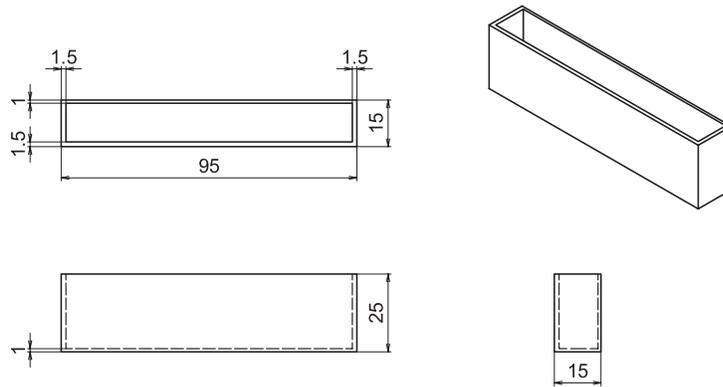
The bottom piece, which has a rectangular slot at the top, and terminating to a circular hole, at the bottom, is shown in Figure 6.



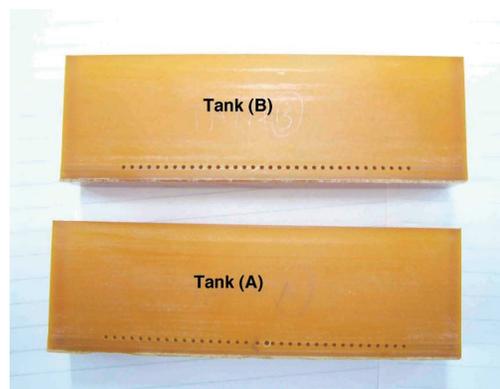
**Figure 6** Schematic diagram of the bottom piece.

Drawing of the tanks and the fabricated tanks, with holes, are shown in Figure 7. The holes were of 1 mm diameter with 1 mm gap in between them.

The holes of one tank is staggered compared to the holes of the other tank.



(a) Dimensions



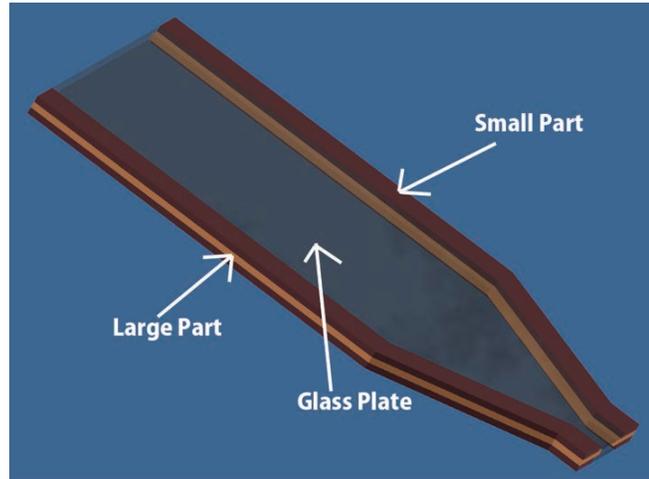
(b) Holes detail



(c) A photographic view of the tanks

**Figure 7** Tanks details (a) schematic diagram, (b) pictorial side view, (c) pictorial view from the top.

An artistic view of the side plates with transparent windows is shown in Figure 8.



**Figure 8** An artistic view of the side plates with transparent windows.

A photographic view of the Hele-Shaw setup is shown in Figure 9. The tube at the bottom of the device is connected to a flow control valve. The control valve opening can be adjusted to vary the flow speed in the test-section of the Hele-Shaw device.



**Figure 9** A view of complete Hele-Shaw device assembly.

### 3 Hele-Shaw Apparatus

The Hele-Shaw apparatus produces a flow pattern which is similar to that of potential flow. It is an analogy experiment known as Hele-Shaw analogy. The flow in the apparatus is actually a highly viscous flow between two parallel plates with a very small gap between them. In this flow the inertia force is negligible compared to the viscous force. Under this condition the flow equation has the same form as that of Euler's potential flow, however it does not satisfy the no-slip wall boundary condition. There is slip at the wall. Many interesting phenomena pertaining to potential flow can be observed using this apparatus. The flow through Hele-Shaw apparatus is two-dimensional and incompressible. In Hele-Shaw apparatus, the viscous flow of a liquid between two closely spaced plates may be shown to simulate the streamlines in the flow of a frictionless inviscid fluid. The Hele-Shaw flow is a low Reynolds number flow which has wide application in flow visualization apparatus because of its surprising property of reproducing the streamlines of potential flows (i.e. infinite Reynolds number flows).

A view of the Hele-Shaw apparatus is shown in Figure 9. This equipment basically consists of two parallel plates made of thick, transparent (glass or plastic) plates clamped together along the edges with a narrow (about 1 mm) space in between them. The assembly of these two transparent sheets kept parallel with an uniform narrow space between them is provided with two small tanks of rectangular cross-section at the top end, as shown in Figure 9. The tanks are connected to the rectangular slit formed by the transparent sheets by a set of small holes (about 1 mm diameter) arranged in a row, as shown in Figure 7. The holes from the two tanks are arranged to occupy alternate locations for communication. The other end of the rectangular slit is made to terminate in a circular hole, by gradually narrowing it after a specified distance from the tanks at the top. One of the tanks is filled with water and the other with a dye (say water color). Initially the circular passage at the bottom end of the apparatus is closed and the apparatus is kept vertical. Once the passage is opened, flow of water and dye takes place through the rectangular passage. Within a short duration, a flow field of water with uniform streamlines of dye in it is established in the narrow passage between the transparent plates.

The water as well as the dye kept in the tanks are essentially fed to the apparatus by gravity. Clean tap water is good enough for the main flow. A dilute solution of potassium permanganate can be used as the dye for visualization. The uniform flow field established in the rectangular slit of Hele-Shaw apparatus can be used as the test-section for visualizing flow over many objects of practical interests.

For flow visualizing the with Hele-Shaw apparatus the procedure described below may be employed.

- Mount the Hele-Shaw apparatus in a vertical position, as shown in Figure 9.
- Place the model of interests (say a rectangular body), which has same

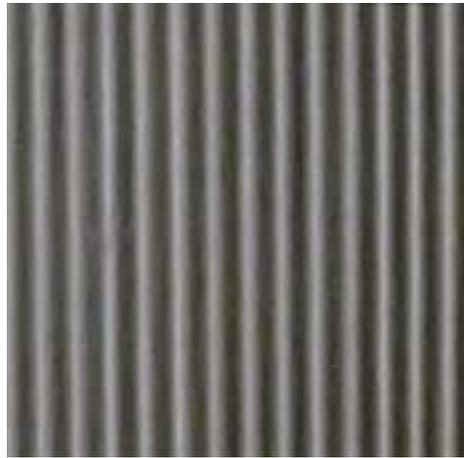
thickness as the slit, at the middle of the test-section.

- Fill up the tanks with water and dye with the pinch cock closed.
- Connect the drain tube of the apparatus to a measuring jar.
- Open the pinch cock slowly. Water and dye will start flowing through the slit, establishing a flow field around the rectangular model.
- The flow field with the dye streaks as the streamlines flowing around the rectangular model may be photographed or sketched on a plain paper by projecting a light to pass through the transparent sheets and making the image to fall on the paper placed on the other side of the apparatus.

The above procedure has to be repeated for visualizing flow pattern around any other model of interest.

## 4 Visualization

First step in the visualization with Hele-Shaw apparatus is to ensure that the flow in the device is uniform. This can easily be tested by operating the device without any model in the test-section. The flow pattern in the empty test-section of the present device is shown in Figure 10.



**Figure 10** streamlines in the test-section

The dye used is printing ink. The black and white streaks are the ink and water streak lines, respectively. It is heartening to see that the streak lines are absolutely smooth and parallel, ensuring that the flow in the test-section is perfectly uniform. This certifies that the device fabricated is of good standard.

Once the flow through the test-section is studied and certified, any model to be studied can be placed in the test-section. It is essential to ensure that

the model thickness is exactly the same as the gap between the window plates. The model has to be placed properly, at the middle of the test-section. Once the model is positioned in the test-section, the pinch cock can be opened gently to establish the flow. The flow coming out of the device can be collected for a known period of time. The volume collected over a known will give the flow velocity through the device.

The cross-section of the device is  $A$ , say. Then the volume flow rate becomes

$$\dot{V} = A \times V$$

Thus, if  $t$  is the time over which the volume collected is  $V$  we have the flow velocity as

$$V = \frac{V}{t \times A}$$

Now, the Reynolds number of the flow is given by

$$\text{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}$$

where  $\rho$  and  $\mu$  are the density and viscosity coefficient of water, respectively and  $L$  is the characteristic length.

Thus, the velocity of the flow through the apparatus may be determined by measuring the volume rate of the flow through it. This may simply be done by collecting the flow through the drain plug over a time interval. With this velocity, the Reynolds number of the flow may be calculated for the model under study. Many interesting steady, two-dimensional potential flow patterns can be demonstrated using the Hele-Shaw apparatus.

From the above discussion it is evident that, the Hele-Shaw apparatus is a simple equipment capable of yielding many interesting flows of practical importance, provided it is used efficiently. It is a matter of common sense to realize that the models kept in the slit must not allow any flow to take place between the model side surface and the apparatus wall. This is to make sure that the flow is strictly two-dimensional.

#### 4.1 Basic Equations of Hele-Shaw Analogy

We have seen that the Hele-Shaw apparatus produces a flow pattern which is similar to that of potential flow. Further, it can be mathematically shown that, under Hele-Shaw flow conditions the governing equations of the flow are of the same form as that of Euler's potential flow, however it does not satisfy no-slip condition at the wall. There is slip at the wall. The flow through the apparatus, as it can be seen, is two-dimensional and incompressible.

The Navier Stokes equations for steady incompressible flow are

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (1a)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (1b)$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (1c)$$

where  $u$ ,  $v$  and  $w$  are the velocity components along the  $x$ ,  $y$  and  $z$  directions, respectively. The  $x$ -coordinate is along the flow,  $z$  in the direction of gap between the two plates, and  $y$  is the transverse direction. The velocity component  $w = 0$ , since there is no flow normal to the side wall plates, and hence  $z$ -component in the Navier-Stokes equation vanishes. In the Hele-Shaw flow the inertia force is negligible compared to the viscous force and hence the left hand side of  $x$  and  $y$ -momentum equations can be neglected. Similarly, in the viscous terms only  $\partial^2 u / \partial z^2$  and  $\partial^2 v / \partial z^2$  are significant since the other gradients are comparatively small. Therefore,  $x$  and  $y$ -momentum equations reduce to

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (2b)$$

Also, we know that, for a two-dimensional laminar flow in a channel, the velocity profile is given by the relation

$$u = u_{\max} \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

where  $2c$  is the channel width, that is the distance between the two plates in the Hele-Shaw apparatus, and  $u_{\max}$  is the maximum of the  $x$ -component of velocity  $u$ . The above velocity profile may also be written as

$$u = \frac{3}{2} u_m \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \quad (3)$$

where  $u_m$  is the mean value of the  $u$  velocity component. Similarly, the velocity along the transverse direction can be expressed as

$$v = \frac{3}{2} v_m \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) \quad (4)$$

Using Eqs. (3) and (4) into Eqs. (2), we get

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{3\mu}{c^2} u_m \quad (5a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{3\mu}{c^2} v_m \quad (5b)$$

Differentiating the  $x$  and  $y$  components of Eqs. (5a) and (5b) with respect to  $y$  and  $x$ , respectively, and comparing the equal terms, we obtain

$$\frac{\partial u_m}{\partial y} = \frac{\partial v_m}{\partial x} \quad (6)$$

In terms of stream function, the velocity components are

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

and

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Assume (for the time being) that,  $u = u_m$  and  $v = v_m$ . From Eq. (6), we get

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

i.e.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0} \quad (7)$$

Equation (7) represents a steady, two-dimensional, irrotational, and incompressible flow. We arrived at Eq. (7), starting from full Navier-Stokes equations and simplifying them for Hele-Shaw flow. Hence, it may be concluded that the viscous incompressible flow through Hele-Shaw apparatus is equivalent to potential flow.

## 5 Flow Past some Shapes

Ensuring that the flow through the test-section of the Hele-Shaw device made is uniform and parallel, as seen in Figure 10, some specific models with and without sharp corners were placed in the test-section, and the streamline pattern around the models were visualized, using black color printing ink as the dye. Flow past a circular disk, a square plate and a triangular plate, in two orientations, were visualized. The streamlines around these object studied are given in Figures 11 to 14.

Streamlines around the circular disk, shown in Figure 11, exhibits a pattern identical to potential flow past a two-dimensional circular cylinder. The flow is symmetrical about both horizontal and vertical axes. The forward and rear stagnation points are clearly seen. This flow pattern clearly demonstrate that the flow in the Hele-Shaw device is analogous to potential flow.

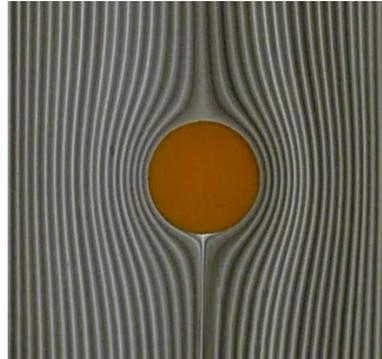


Figure 11 Flow pattern around a circular disk.

Flow pattern around a square plate, visualized in the Hele-Shaw device is shown in Figure 12. It is interesting to see that, as in the case of flow past circular disk, the flow past the square plate is also symmetrical about both horizontal and vertical axes. In spite of the presence of sharp corners, the forward and rear stagnation points are clearly seen. There is no wake behind the object, as if the flow is inviscid.



Figure 12 Flow pattern around a square plate.

Flow past an equilateral triangular plate, with its vertex up and base up, studied in the Hele-Shaw device are shown in Figures 13 and 14, respectively. It is heartening to see that the flow pattern for both the orientations of the triangular plate exactly resembles that of potential flow past the object.



**Figure 13** Flow pattern around a triangular plate with vertex up.



**Figure 14** Flow pattern around a triangular plate with vertex down.

From the above visualization of flow past objects, with and with sharp corners, it is evident that, the present design of Hele-Shaw device is good and the device made with this design establishes the desired flow field, which is analogous to potential flow.

## Reference

Ethirajan Rathakrishnan, *Instrumentation, Measurements, and Experiments in Flow*, CRC Press, Boca Raton, Florida, USA, 2007.